COMMENT L'HISTOIRE DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE PEUT AIDER LES PROFESSEURS DANS LEUR ENSEIGNEMENT

Georges GLAESER

L'article qui suit est une conférence à la Régionale de l'A.P.M., faite le 30 janvier 1986 à Mulhouse et le 6 février 1986 à Strasbourg. Il a été rédigé par Claudine KAHN et Odile SCHLADENHAUFEN

Ce n'est pas en résumant la vie de DESCARTES en deux lignes au bas d'une page d'un manuel ou en donnant la date du *Discours de la Méthode* qu'on apporte une information utile dans l'enseignement de la géométrie analytique. D'autant plus que ce qui est dit est parfois faux! : ce n'est pas DESCARTES qui a créé la géométrie analytique. Cette affirmation deviendrait plus raisonnable si l'on prenait pour définition de la géométrie analytique : *l'application de l'algèbre à la géométrie.* Celle-ci ne pouvait être antérieure à la mise au point d'un calcul algébrique!

Pour déterminer les diverses étapes de la constitution de cette branche de la mathématique, la méthode utilisée est la suivante : en examinant systématiquement des travaux de géomètres des siècles passés, il apparaît que les procédés ont considérablement évolué; certains exploits de PONCELET ne pouvaient pas figurer dans les travaux de PASCAL . Non seulement les connaissances ont augmenté mais surtout les pratiques et les savoir-faire ont gagné en efficacité.

Notre enseignement ne peut se réduire aujourd'hui à une simple transmission de nos connaissances. Il faut en outre se livrer à une éducation sur les manières d'aborder une question ou de conduire un calcul. Cette intervention pédagogique devrait se produire en toutes occasions, même à titre de commentaire d'une méthode utilisée par un professeur.

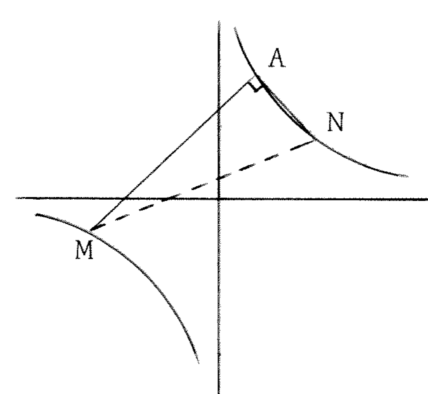
QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE?

1. Le calcul géométrique.
2. La résolution de problèmes de géométrie par l'algèbre.
3. L'interprétation de l'algèbre par la géométrie.
4. Va-et-vient entre 2 et 3.
5. L'usage de coordonnées institutionnalisées.
6. L'usage de divers outils de repérage (coordonnées, rectangulaires ou obliques, planes ...,
   représentations paramétriques, plan complexe,
   vecteurs ...).
7. Usage d'objets orientés (axes, angles de droites ...).
8. Le formulaire.
9. Choix habile de l'outil le plus approprié dans les formulaires.
10. Usage d'algorithmes.
11. Mise en oeuvre d'heuristique.
12. L'art d'invoquer des calculs qu'on *n'effectue pas*.

L'histoire de la Géométrie analytique
s'étend sur 22 siècles
(avant APPOLONIUS jusqu'à nos jours).

Voici comment ces différents points interviennent dans la résolution d'un problème qui nécessite peu de connaissances mais met en évidence la complexité de l'éducation à donner aux élèves :

Problème



Énoncé : Démontrer que la droite MN garde une direction fixe lorsque l'angle droit $\widehat{MAN}$ pivote autour du point fixe A.

Film de la résolution

$xy = 1 \qquad A(a, a^{-1})$	5.6
$\begin{cases} y - a^{-1} = t(x - a) \\ xy = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad tx(x-a) + x/a - 1 = 0$	8 10
La racine $x = a$ est évidente	11
Produit des racines	11
Coordonnées de M : $x = -1/ta \quad y = -ta$	10
Les coordonnées de N s'obtiennent en changeant t en $-1/t$	11
$x = t/a \quad y = a/t$	10
Inutile d'écrire l'équation de MN	12
Le calcul de la pente suffit. On trouve a^2	8
En faisant tendre M vers A, on trouve que a^2	
est la pente de la normale en A	3

CHRONOLOGIE SOMMAIRE

1. Phase heuristique

EUCLIDE ARCHIMÈDE APPOLONIUS (262–200 av J.C.)	Calcul géométrique sans algèbre — sans coordonnées Sections coniques
ORESME (1361)	*De latitudinibus formarum* Les coordonnées géographiques
Les nombres négatifs ne sont pas encore familiers à cette époque	
FERMAT dès 1629	Interprétation de l'*Algèbre* par la géométrie. Etude géométrique de courbes définies algébriquement.
DESCARTES (1637)	La *Géométrie* résout des problèmes géométriques par l'*Algèbre*. Pas de coordonnées institutionnalisées. Les quatre quadrants sont étudiés séparément (exemple : le folium de DESCARTES n'était vu que dans le premier quadrant; on complétait par symétrie).

Commentaires

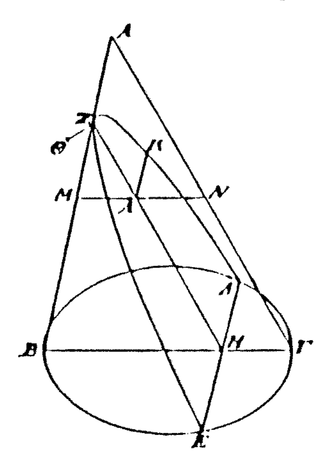
1.— Dans la page d'APPOLONIUS on ne trouve ni axe, ni coordonnées, mais ce qui est écrit peut être transcrit assez simplement en utilisant des coordonnées. Si bien que tout un livre d'APPOLONIUS correspond à la moitié de ce qu'on enseignait en Terminale, il y a quelques années.

Les coniques d'Apollonius de Perge

PROPOSITION XI

Si un cône est coupé par un plan passant par l'axe, et s'il est coupé par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite perpendiculaire à la base du triangle passant par l'axe ; si, de plus, le diamètre de la section est parallèle à l'un des côtés du triangle passant par l'axe, le carré de toute droite menée de la section du cône, parallèlement à la section commune du plan sécant et de la base du cône, jusqu'au diamètre de la section, équivaut au rectangle délimité par la droite qu'elle découpe sur le diamètre, du côté du sommet de la section, et par une certaine droite dont le rapport à la droite située entre l'angle du cône et le sommet de la section est le même que celui du carré de la base du triangle passant par l'axe au rectangle délimité par les deux côtés restants du triangle. Nous appellerons une telle section une parabole (¹). (x^2..) (... $= y \times 2P$)

Soit un cône dont le sommet est le point Α, et dont la base est le cercle ΒΓ. Coupons-le par un plan passant par l'axe, lequel détermine comme section le triangle ΑΒΓ. Coupons-le aussi par un autre plan coupant la base du cône suivant une droite ΔΕ, perpendiculaire à la droite ΒΓ, lequel détermine la ligne ΔΖΕ comme section dans la surface du cône, tandis que le diamètre ΖΗ de la section est parallèle à l'un des côtés ΑΓ du triangle passant par l'axe. Menons, du point Ζ, la droite ΖΘ perpendiculaire à la droite ΖΗ, et faisons en sorte qu'une droite ΖΘ soit à la droite ΖΑ comme le carré de la droite ΒΓ est au rectangle délimité sous les droites ΒΑ, ΑΓ (¹). Enfin, prenons un point quelconque Κ sur la section, et menons, par ce point Κ, la droite ΚΛ parallèle à la droite ΔΕ. Je dis que le carré de la droite ΚΛ équivaut au rectangle délimité sous les droites ΘΖ, ΖΑ.



2.— Quant à DESCARTES, il cherche des relations entre les longueurs, donne des équations, mais n'introduit pas de coordonnées. Pour lui, la chose importante est la géométrie; l'algèbre n'est qu'un outil. Il critique même les gens, qui, comme FERMAT, étudient des courbes définies par des "équations" sans références à des problèmes posés par la géométrie traditionnelle.

LIVRE PREMIER

Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites

Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

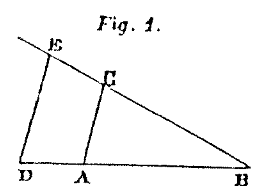
Comment le calcul d'arithmétique se rapporte aux opérations de géométrie.

Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour les préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres, ou en ôter; ou bien en ayant une, que je nommerai l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut ordinairement être prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division; ou enfin trouver une ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

La multiplication.

Soit, par exemple, AB *(fig. 1)* l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

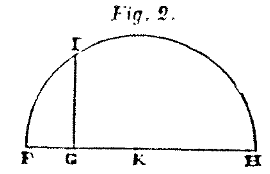
La division.

Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

L'extraction de la racine carrée.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH *(fig. 2)*, je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Je ne dis rien ici de la racine cubique, ni des autres, à cause que j'en parlerai plus commodément ci-après.

Comment on peut user de chiffres en géométrie.

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a; et ab pour les multiplier l'une par l'autre; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même (1); et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini; et $\sqrt{a^2 + b^2}$,

(1) Cependant Descartes répète presque toujours les facteurs égaux lorsqu'ils ne sont qu'au nombre de deux. Nous avons ici constamment adopté la notation a^2.

ESSAI SUR LES CONIQUES (Pascal 1640)

Pour apprécier la lenteur de l'évolution, examinons ce passage de l'*Essai sur les coniques* que PASCAL écrivit douze ans après la parution de la *Géométrie* de DESCARTES.

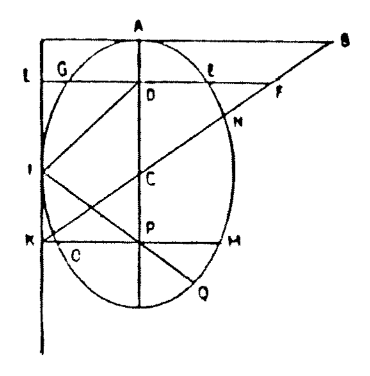
Le jeune géomètre y raisonne sur la figure ci-dessous, où il a construit une droite auxiliaire CB. La longueur AB a été choisie égale à la moyenne géométrique entre les demi-axes de l'ellipse. Il prouve alors que

la somme des carrés de DE et DF est égale au carré de AB.

Nous devons faire un effort de décryptage pour reconnaître ici la première apparition de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

L'artifice de la droite CB n'intervient que pour éviter d'écrire que $DF = (a/b)\,DE$, ce qui n'est pas dans les habitudes de l'époque.



3.— Pour Blaise PASCAL (1623–1662), il n'y a pas de formules automatiques, il faut à chaque fois inventer une construction. Il est probable que PASCAL n'ait jamais vraiment compris ce qu'étaient les nombres négatifs. La seule citation, sauf erreur, que l'on puisse trouver dans ses oeuvres est :

J'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte quatre, reste zéro.
PASCAL : *Oeuvres Complètes* .— Édition Pléiade, 1954, p. 1109

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
2. Construction de l'algorithme

EULER (1748)	*"Introductio in Analysim infinitorum"* (Tome 2) Présentation des coordonnées "cartésiennes" (positives ou négatives). Changement de coordonnées. Classification des coniques et des quadriques. Pas d'étude systématique de la droite!
LAGRANGE (1770) De 1768 à 1820, par MONGE (1795), LACROIX et leurs élèves	Élaboration du formulaire La dénomination *"Géométrie Analytique"* LACROIX prétend faire pour la Géométrie ce que LAGRANGE avait réalisé auparavant pour la Mécanique analytique Application automatique de séquences algorithmiques Stock d'alternatives pour exprimer les mêmes questions : usage de déterminants
BIOT (1809) G.LAMÉ (1818)	Premier manuel scolaire de G.A. *"Examen des différentes méthodes pour résoudre les problèmes de géométrie"* (ouvrage de réflexion à l'usage des mathématiciens : apparition de techniques nouvelles).
L.CARNOT (1803)	*"La géométrie de position"* Critique des difficultés causées par les nombres négatifs Le mot *"abscisse"* désigne encore une distance
PONCELET (1862) CHASLES	Géométrie orientée : *"Sur la loi des signes de position en Géométrie"* publié en 1862 (recherches de 1815 –1816)
MONGE	Aires et volumes orientés

Commentaires.

1. EULER ne traite pas de l'équation de la droite; il a peur de la trivialité : c'est un phénomène épistémologique important. La première mention de l'équation de la droite est faite dans un ouvrage de LAGRANGE (1770). La même année, paraissent deux manuels scolaires, l'un du Marquis de l' HOSPITAL, l'autre de Marie-Gaetana AGNESI, en usage chez les Jésuites ainsi qu'en Chine et dans le Nouveau Monde.
On y cite trois types d'équations de droites:

$$y = ax + b\ , \quad y = -ax + b\ , \quad y = ax - b$$

(sous-entendu : a et b sont deux nombres positifs), ce qui témoigne d'une peur des nombres négatifs.
Encore à cette époque, on fait une différence entre positif et négatif, comme entre le chaud et le froid. Mais on ne trouve pas d'équation de la forme $y = -ax - b$, car dans ce cas, la droite ne traverse pas le premier quadrant.
Pour ceux qui ont la nostalgie du latin, voici une page d'EULER qui donne une interprétation des nombres positifs et négatifs avec référence aux dextrorsum et sinistrorsum.

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

EULER (1748)

LIBER SECUNDUS
Caput I

DE LINEIS CURVIS IN GENERE

1. Quoniam quantitas variabilis est magnitudo in genere considerata omnes quantitates determinatas in se complectens, in Geometria huiusmodi quantitas variabilis convenientissime repraesentabitur (Fig. 1) per lineam rectam indefinitam RS. Cum enim in linea indefinita magnitudinem quamcunque determinatam abscindere liceat,

R p A P S

Fig. 1

ea pariter ac quantitas variabilis eandem quantitatis ideam menti offert. Primum igitur in linea indefinita RS punctum assumi debet A, unde magnitudines determinatae abscindendae initium sumere censeantur; sicque portio determinata AP repraesentabit valorem determinatum in quantitate variabili comprehensum.

2. Sit igitur x quantitas variabilis, quae per rectam indefinitam RS repraesentetur, atque manifestum est omnes valores determinatos ipsius x, qui quidem sint reales, per portiones in recta RS abscindendas repraesentari posse.

Scilicet, si punctum P in ipso puncto A capiatur, intervallum AP evanescens exhibebit valorem $x = 0$; quo magis autem punctum P ab A removetur, eo maior valor determinatus ipsius x intervallo AP repraesentabitur.

Vocantur autem haec intervalla AP *abscissae*.

Atque ideo abscissae exhibent variabilis x valores determinatos.

3. Quia vero recta RS indefinita utrinque ab A in infinitum excurrit, utrinque etiam omnes ipsius x valores abscindi poterunt. Quodsi autem valores affirmativos ipsius x ab A dextrorsum progrediendo abscindamus, intervalla Ap sinistrorsum abscissa valores ipsius x negativos exhibebunt. Cum enim, quo

utrinque = de part et d'autre.

En 1750 CRAMER, dans son "*Analyse des lignes courbes*", étudie la courbe d'équation $x^2 + 6ax + 5a^2 - 6ay = 0$. Il regarde ce qui se passe lorsque x augmente, obtient ainsi la branche infinie *positive*. Puis il change x en $-x$ de manière incorrecte mais arrive au résultat.

INTRODUCTION À L'ANALYSE DES LIGNES COURBES ALGÉBRIQUES

par

Gabriel CRAMER (1750)

Ainsi dans la Courbe que représente l'éq : $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ou $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ [§. 11], l'équation fait voir qu'à l'Origine, où x est zéro, la valeur de
Fig. 10. y est $\frac{5}{6}a$. Aa $= \frac{5}{6}a$ est donc la grandeur de la *prémiére ordonnée*. Supposant ensuite x positive, on voit qu'à mesure qu'elle augmente, les termes $\frac{xx}{6a}$ & x augmentent aussi, sans que le terme constant $\frac{5}{6}a$ diminuë ; ce qui prouve que

l'abſciſſe x croiſſant, l'ordonnée y [$=\frac{xx}{6a}+x+\frac{1}{6}a$], qui eſt poſitive, croit auſſi. Donc du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe n'a qu'une branche ad, qui tombe toute entiére dans l'angle des coordonnées poſitives, & qui, partant de l'extrémité a de la prémiére ordonnée Aa, s'éloigne à l'infini & de l'Axe des abſciſſes & de l'Axe des ordonnées.

Pour connoître le cours de cette Ligne du côté des abſciſſes négatives, on fera x négative, ce qui change l'éq. $y=\frac{xx}{6a}+x+\frac{1}{6}a$ en $y=\frac{xx}{6a}-x+\frac{1}{6}a$. Où l'on voit que x étant moindre que $6a$, $\frac{xx}{6a}$ eſt moindre que x, de façon que le terme conſtant $\frac{1}{6}a$ eſt moins augmenté par le terme poſitif $\frac{xx}{6a}$ que diminué par le terme négatif $-x$.

2. Etablissement du formulaire (1768 – 1820)

De nos jours, on enseigne souvent l'Analytique en très peu de temps : on présente la liste de formules (à encadrer et apprendre par coeur) qui expriment les faits géométriques simples. Il s'agira de choisir et combiner ces formules, puis de les appliquer automatiquement.

Ce furent principalement les premiers professeurs de l'Ecole Polytechnique, qui dressèrent ce formulaire en dégageant son mode d'emploi (MONGE, LACROIX).

Dans la phase suivante, ce formulaire acquit de la souplesse, par introduction de variantes et de symboles plus maniables (déterminant, plan complexe, quaternions, vecteurs ...).

L'introduction des coordonnées négatives et de la géométrie orientée se heurta longtemps à un véritable goulot d'étranglement.

Voici un extrait du "*Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'Algèbre à la Géométrie*" de LACROIX.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE

par

LACROIX

Pour trouver la valeur de x, qui répond au point f où la ligne DF rencontre l'axe AB des abscisses, il faut faire $y=0$, ce qui donne

$$ax+b=0, \quad \text{et} \quad x=-\frac{b}{a}=Af.$$

Lorsque x, restant toujours négatif, sera devenu plus grand que la quantité $\frac{b}{y}$, y lui-même deviendra négatif. Mais au-delà du point f, la ligne DF se trouve au-dessous de la ligne AB; l'ordonnée $p'n'$ tombera donc d'un côté opposé à celui où elle étoit située d'abord, et par conséquent les valeurs négatives de y doivent se porter d'un côté de la ligne AB, opposé à celui qu'on a adopté pour les valeurs positives.

Ces remarques, qui confirment ce qui a été dit dans le n°. 72, ne sont pas particulières à la ligne droite. On ne sauroit y faire trop d'attention; car c'est de l'usage des quantités négatives dans les figures, que dépendent en grande partie, les diverses formes qu'affectent les lignes courbes.

L'équation $y=ax+b$ ne renfermant que deux constantes, a et b, dont la valeur particularise la droite qu'on considère, en la distinguant de toute autre, il s'ensuit que deux conditions suffisent pour déterminer cette droite. Celles qui s'offrent les premières, sont de l'assujettir à passer par deux points donnés; à être parallèle ou perpendiculaire à une autre droite donnée, et à passer en outre par un point donné. Nous aurons besoin dans la suite de connoître la forme que prend l'équation $y=ax+b$, pour satisfaire à ces diverses conditions; c'est pourquoi nous allons les examiner chacun en particulier.

84. Si on cherche l'équation de la ligne droite qui passe par deux points, dont les abscisses soient α et α', et les ordonnées β et β', on mettra successivement α et α' à la place de x, β et β' à celle de y, et on aura, pour déterminer a et b, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}\beta=a\alpha+b\\ \beta'=a\alpha'+b\end{array}\right\}\text{ dont on tirera }\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\\[2ex] b=\dfrac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}\end{array}\right.$$

et il en résultera

$$y=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x+\frac{\alpha'\beta-\alpha\beta'}{\alpha'-\alpha}$$

pour l'équation de la droite cherchée.

On peut donner à ce résultat une forme plus simple; car si on retranche de l'équation $y=ax+b$, l'une des deux équations ci-dessus, la première, par exemple, b disparoîtra, et il viendra

$$y-\beta=a(x-\alpha);$$

cette dernière équation sera celle d'une droite assujettie à passer par le point dont les coordonnées sont α et β, et faisant d'ailleurs avec l'axe AB un angle quelconque: en y mettant, au lieu de a, la valeur trouvée précédemment, on aura

$$y-\beta=\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha).$$

La distance des points proposés, ou la partie qu'ils interceptent sur la droite cherchée, aura pour expression

$$\sqrt{(\alpha'-\alpha)^2+(\beta'-\beta)^2}:$$

cela se voit évidemment, en supposant que N et N' représentent ces points; car leur distance NN' étant l'hypothénuse du triangle rectangle NRN', il s'ensuit que

$$\overline{NN'}^2=\overline{NR}^2+\overline{N'R}^2=(AP'-AP)^2+(P'N'-PN)^2.$$

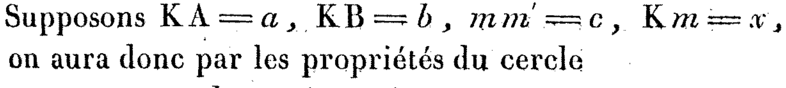
H 2

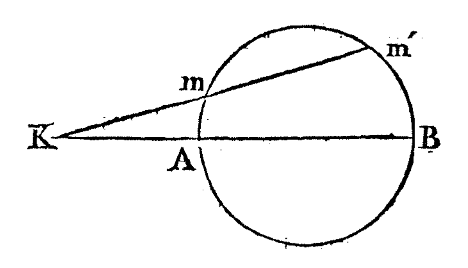
3. Dans le problème qui suit, CARNOT essaie de déterminer une corde mm' qui ait une longueur donnée, mais il tombe sur une racine négative qu'il ne parvient pas à interpréter. Son livre est un témoignage de l'incompréhension des nombres relatifs à l'époque.

GÉOMÉTRIE DE POSITION

par

Lazare CARNOT


Supposons $KA = a$, $KB = b$, $mm' = c$, $Km = x$, on aura donc par les propriétés du cercle



$$ab = x(c + x) = cx + xx;$$

donc $xx + cx - ab = 0$, ou $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$.

x a donc deux valeurs : la première, qui est positive, satisfait sans difficulté à la question : mais que signifie la seconde qui est négative ? Il paroît qu'elle ne peut répondre qu'au point m', qui est le second de ceux où Km coupe la circonférence : et en effet, si l'on cherche directement Km', en prenant cette droite pour l'inconnue x, on aura $x(x - c) = ab$, ou $x = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, dont la valeur positive est précisément la même que celle qui s'étoit présentée dans le premier cas avec le signe négatif. Donc, quoique les deux racines de l'équation $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$ soient l'une positive et l'autre négative, elles doivent être prises toutes les deux dans le même sens par rapport au point fixe K. Ainsi la règle qui veut que ces racines soient prises en sens opposés porte à faux. Si au contraire le point fixe K étoit pris sur le diamètre même AB et non sur le prolongement, on trouveroit pour x deux valeurs positives, et cependant elles devroient être prises en sens contraire l'une de l'autre. La règle est donc encore fausse pour ce cas,

4. Il semble que ce soit Poncelet qui mentionna pour la première fois la relation de Chasles (dans le texte suivant)!

APPLICATION D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

Troisième cahier

Sur la loi des signes de position en géométrie,
la loi et le principe de continuité (1864)

Poncelet prétend avoir déjà trouvé cela en 1815–1816.

Loi des signes de position, relative aux points rangés sur une ligne droite, une circonférence de cercle, etc.

Ces définitions et notions premières étant admises, passons à l'examen du système de trois points en ligne droite ; en vertu du rapprochement que la *fig.* 101 établit entre les distances linéaires, les arcs et les angles, ce que nous dirons des uns pourra s'appliquer immédiatement aux autres : c'est pourquoi, dans ce qui suit, je me bornerai à considérer les distances linéaires seules, mais on devra se rappeler que les mêmes choses s'appliquent aux arcs et aux angles.

7. Soient donc a, b, c (*fig.* 102) trois points donnés sur la droite indéfinie AB ; l'on aura évidemment, pour le cas où b est entre a et c, en cheminant de la gauche vers la droite, c'est-à-dire dans l'ordre

$$(abc), \quad ac = ab + bc.$$

Or cette relation intuitive aura lieu tant que b sera entre a et c, quelles que soient d'ailleurs les distances qui séparent ces points ; c'est-à-dire tant que a, b, c n'auront pas changé de position entre eux, ou, si l'on veut encore, tant qu'aucune de leurs distances mutuelles ne sera devenue inverse, ~~rétrograde~~ par rapport au sens et à l'ordre primitifs.

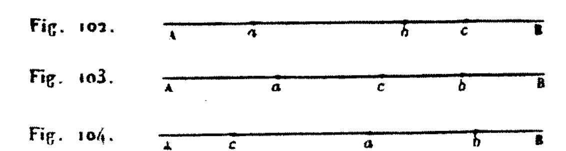
Il en sera de même évidemment de toutes les autres relations dérivées de la première, soit géométriquement, soit algébriquement, par exemple de celles-ci,

$$ab = ac - bc, \quad \overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + 2ab \cdot bc,$$
$$\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - 2ac \cdot bc, \text{ etc., etc;}$$

car elles en sont des transformations exactes et rigoureuses : toutes ces relations demeurent immédiatement applicables, sans aucun changement de signe, à l'état supposé du système.

8. Mais la même chose n'a plus lieu dès l'instant où la disposition réciproque des points vient à changer, par suite du déplacement d'un ou de plusieurs d'entre eux: c'est-à-dire dès l'instant où l'une quelconque des distances ab, ac, bc devient inverse ou rétrograde par rapport à l'origine d'où elle se mesure, en allant toujours de la gauche vers la droite selon notre hypothèse invariable.

En effet, si le point b, par exemple (*fig.* 102), s'est trans-



porté (*fig.* 103), d'un mouvement continu quelconque, de la gauche à la droite de c, la distance bc ayant changé de sens, on aura (*fig.* 102), dans l'ordre

$$(acb),\qquad ac = ab - bc;$$

relation caractéristique qui ne diffère de $ac = ab + bc$, qu'en ce que bc a pris un signe contraire à celui qu'il avait primitivement, c'est-à-dire est devenu négatif en même temps qu'inverse en passant par zéro. Or, il en sera évidemment ainsi de toutes les autres relations métriques qu'on pourra déduire de celle-là algébriquement, et qui correspondront, chacune à chacune, aux premières de la combinaison (abc) appartenant à la *fig.* 102; elles ne différeront toutes, de leurs *corrélatives*, que par le changement de signe de bc.

Si donc on voulait rendre applicables à la seconde situation (acb) des points a, b et c, les relations trouvées pour la première (abc), il suffirait de changer bc en $-bc$ dans la relation primitive et dans toutes ses dérivées.

Désormais nous cesserons, pour la simplicité, de distinguer les relations dérivées de la relation primitive, parce qu'elles sont des conséquences rigoureuses de celle-ci, algébriquement ou géométriquement parlant.

9. Considérons maintenant la troisième et dernière disposition distincte que peuvent prendre les points a, b, c, par exemple celle où le point c, de la droite AB, passe en rétrogradant à gauche du point a. On a alors (*fig.* 104), dans l'ordre

$$(cab),\qquad ac = bc - ab,$$

ou, algébriquement,

$$-ac = ab - bc;$$

relation qui fait voir que, par suite du déplacement du point c de la *fig.* 102 à la *fig.* 104, ac et bc ont changé à la fois de signe, de même que les distances qu'elles représentent, devenues inverses, ont changé de sens relativement à l'ordre primitif des points ou des lettres.

Si donc l'on veut rendre applicable à la dernière de ces figures les relations diverses trouvées pour la première, il suffira d'y changer les signes des deux distances bc et ac, devenues (*fig.* 102) cb et ca dans l'ordre rétrograde.

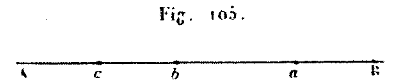
D'ailleurs, ces diverses relations et leurs dérivées algébriques auront lieu pour toutes les grandeurs des lignes qui y entrent et qui, rapportées à la même unité de mesure, pourraient être représentées par des lettres quelconques, à la manière de Viète, et cela quand bien même elles changeraient de signe ou de sens en passant par l'infini.

10. Sans qu'il soit besoin d'aller plus loin, il est visible que les observations ci-dessus, relatives au système des points a, b, c (*fig.* 102), se reproduisent également dans toutes les autres permutations de ces points, à l'égard des changements de signe que doivent subir les distances de la relation primitive, pour qu'elle devienne applicable indistinctement à toutes les situations possibles. En particulier, quand les points a, b, c prennent la position indiquée par la *fig.* 105 ci-dessous, les distances sont devenues à la fois inverses ou rétrogrades par rapport à celles de la *fig.* 102 ; mais alors on a

$$ac = ab + bc, \quad \text{soit} \quad -ac = -ab - bc;$$

ces distances sont donc aussi devenues simultanément négatives; ce qui confirme la règle algébrique. On voit par là, d'ailleurs, que les signes ne sauraient, sans convention expresse, fixer la position absolue des points a, b, c sur la droite AB ; on pourra toujours les renverser symétriquement sans que les relations en soient troublées, en changeant le sens de la génération des lignes de la droite vers la gauche.

Fig. 105.



11. Donc, pour rendre une relation appartenant au système de trois points quelconques en ligne droite, et relative à une situation donnée de ces points, applicable à toutes les situations possibles des mêmes points, il suffit de changer dans cette relation, le signe des distances devenues inverses ou rétrogrades par rapport au sens dans lequel on les supposait primitivement engendrées. En d'autres termes, *il suffit de regarder comme positives les quantités qui conservent le même sens à l'égard de l'extrémité d'où elles se mesurent, et comme négatives celles qui changent de sens par rapport à ce même point.*

> Ainsi, il y aura *variation* de signe et *permanence* en même temps que variation ou permanence de position relative. Il est visible, en outre, que la permanence aura lieu toutes les fois que la distance ne sera devenue ni nulle ni infinie, et que, réciproquement, la variation n'arrivera que dans l'hypothèse contraire.

Après que la résolution de problèmes de géométrie ait été réduite à l'exécution automatique d'un algorithme, on voit se constituer au courant des XIX[e] et XX[e] siècles, des *habitudes heuristiques.* Elles conduisent à des calculs *élégants* et concis, contrastant avec la lourdeur qui régnait auparavant.

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
3. EXTENTION DE L'IDÉE DE COORDONNÉE

WESSEL (1799) ARGAND (1806)	Le plan complexe
HAMILTON (1847)	Les quaternions
HAMILTON GRASSMANN (1844)	Le calcul vectoriel
LAMÉ (1818)	Notations abrégées : on parle de la droite d'équation $l = 0$ au lieu de $ax + by + c = 0$.
BOBILLIER (1797 – 1832) PLÜCKER (1801 – 1868)	Coordonnées homogènes et tangentielles
MÖEBIUS (1827)	" *Das barycentrische Kalkül* "
CAYLEY (1843)	Représentation des transformations par des matrices
PLÜCKER (1828) et PONCELET	Coordonnées plückériennes Allusion à des calculs non exécutés Élimination de la "triple – x": une lettre pour désigner un vecteur, une matrice, une fonction, ...

En particulier il y a des propriétés qui s'expriment mal par calcul, qu'on prend l'habitude de traiter par des raisonnements synthétiques (par exemple : exprimer qu'un triangle est équilatéral où l'usage de coordonnées rectangulaires masque les symétries et les invariances). Il arrive qu'il soit avantageux de changer plusieurs fois de système de coordonnées au cours d'un même problème. Enfin, on voit apparaître des calculs où le choix des coordonnées n'est pas explicité (calcul vectoriel ou barycentrique).

CHRONOLOGIE SOMMAIRE (suite)
4. RENOUVEAU HEURISTIQUE

vers une géométrie analytique,
sans axes ni coordonnées

SALMON (1848 à 1862)	Flexibilité dans l'emploi des nouveaux symboles : virtuosité heuristique.
BOULIGAND (1924)	« Géométrie vectorielle »
XXe siècle	Algèbre linéaire

$l=0$
$\lambda l+\mu m=0$
$m=0$

Dans le livre de SALMON on reconnaît l'*art* du calcul opposé à la *science* du calcul.

Voici une illustration du calcul géométrique sans utilisation de coordonnées. Cette résolution met en oeuvre un procédé de géométrie analytique.

CALCUL GÉOMÉTRIQUE

exemple : Les hauteurs d'un triangle

Il s'agit d'abord d'écrire *l'équation de la hauteur* issue de A. On peut y parvenir péniblement en utilisant des coordonnées cartésiennes en axes rectangulaires (après avoir indiqué les coordonnées des trois sommets). Mais, le calcul devient plus suggestif si l'on remarque que l'ensemble des points X du plan euclidien satisfaisant à

$$\| XB \|^2 - \| XC \|^2 = \| AB \|^2 - \| AC \|^2$$

(Conséquence immédiate du théorème de PYTHAGORE) est la perpendiculaire menée de A sur BC.
En appelant D le point de rencontre des hauteurs issues de A et de B, on en conclut qu'il satisfait aux deux égalités suivantes :

$$\| DB \|^2 - \| DC \|^2 = \| AB \|^2 - \| AC \|^2$$
$$\| DC \|^2 - \| DA \|^2 = \| BC \|^2 - \| BA \|^2,$$

d'où l'on déduit, en ajoutant membre à membre, la conséquence :

$$\| DA \|^2 - \| DB \|^2 = \| CA \|^2 - \| CB \|^2 .$$

Elle exprime que D se trouve sur la troisième hauteur. En outre, les égalités écrites prouvent que :

$$\| AB \|^2 + \| DC \|^2 = \| BC \|^2 + \| DA \|^2 = \| CA \|^2 + \| DB \|^2$$

Conclusion

L'enseignant traditionnel ne trouve aucune difficulté à enseigner la géométrie analytique. Il expédie la présentation du formulaire, et s'étonne de trouver des élèves travailleurs, qui ont bien appris le cours, si maladroits dans la mise en oeuvre de la méthode.
C'est que la difficulté ne porte pas tellement sur l'*enseignement* des connaissances que sur l'*éducation* des savoir-faire.
Le didacticien ferait bien d'étudier minutieusement la pratique de la géométrie analytique à travers les textes des pionniers (sans oublier ORESME, FERMAT, PASCAL, NEWTON, LACROIX, LAMÉ ...). Il reprendra les articles de géométrie parus dans les journaux historiques (de Crelle, de Liouville ...) comme s'il corrigeait des copies d'élèves. Il s'étonnera des maladresses présentes dans les textes de nos prédécesseurs et s'interrogera : "*A quel moment voit-on apparaître tel ou tel perfectionnement dans l'art de calculer ou d'éviter des calculs inutiles ?*".
Pour le didacticien qui s'efforce de découvrir ce que nos élèves ont du mal à trouver tout seuls, et sur quoi nous devons les aider, l'histoire-fiction qui

se réduit à "*Descartes* (1637)" est un obstacle au progrès. On saute ainsi à pieds joints par dessus des siècles de tâtonnements et d'incertitudes pour décrire le progrès scientifique comme une succession de miracles ponctuels.